15/03/2019

Θεώρημα: Κριτήριο Διαγωνοποιησιμότητας

Έστω $f: E \to E$ ένας ενδομορφισμός του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου, όπου $\dim_{\mathbb{K}} E = n < \infty$. Τότε ο f: διαγωνοποιήσιμος $\Leftrightarrow$

α) Οι ιδιοτιμές του f ανήκουν στο $\mathbb{K}$.

β) Για κάθε ιδιοτιμή λ του f: $\dim_{\mathbb{K}} V(\lambda) =$ πολ/τα της λ

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Έστω ότι ο f είναι διαγωνοποιήσιμος και άρα υπάρχει βάση $\beta = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}\}$ του E: $A = M_\beta^\beta(f)$ είναι διαγώνιος.

Τότε:

$$A = \begin{pmatrix} \underbrace{\lambda_1 \ \cdots \ \lambda_1}_{k_1\text{-φορές}} & & & 0 \\ & \underbrace{\lambda_2 \ \cdots \ \lambda_2}_{k_2\text{-φορές}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \underbrace{\lambda_p \ \cdots \ \lambda_p}_{k_p\text{-φορές}} \end{pmatrix}$$

Τότε θα έχουμε: $\lambda_i \neq \lambda_j$ αν $1 \leq i \neq j \leq n$ και $k_1 + k_2 + \dots + k_p = n$

Τότε $P_f(t) = |A - tI_n| = (\lambda_1 - t)^{k_1} (\lambda_2 - t)^{k_2} \cdots (\lambda_p - t)^{k_p}$

Άρα τα λ_i είναι οι ιδιοτιμές του f, ανά δύο διαφορετικές και η πολ/τα της $\lambda_i = k_i$, $1 \le i \le p$

Επειδή $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $\forall i = 1, \dots, p$ έπεται ότι ισχύει η (α)

$V_1 \overset{op}{=} \langle \vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_{k_1}} \rangle$

$V_2 \overset{op}{=} \langle \vec{e_{k_1+1}}, \dots, \vec{e_{k_1+k_2}} \rangle$

$\vdots$

$V_p \overset{op}{=} \langle \vec{e_{k_{p-1}+1}}, \dots, \vec{e_{k_{p-1}+k_p}} \rangle$

Το σύνολο $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_{k_1}}\}$ βάση του V_1. Τότε $\vec{x} \in V_1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{x} = \mu_1 \vec{e_1} + \dots + \mu_{k_1} \cdot \vec{e_{k_1}}$ και άρα:

$f(\vec{x}) = \mu_1 f(\vec{e_1}) + \dots + \mu_{k_1} f(\vec{e_{k_1}}) = \mu_1 \lambda_1 \vec{e_1} + \dots + \mu_{k_1} \lambda_1 \vec{e_{k_1}} =$

$= \lambda_1 (\mu_1 \vec{e_1} + \dots + \mu_{k_1} \vec{e_{k_1}}) = \lambda_1 \vec{x}$

Άρα $\vec{x} \in V_1 \Rightarrow f(\vec{x}) = \lambda_1 \vec{x} \Rightarrow \vec{x} \in V(\lambda_1)$

Άρα $V_1 \subseteq V(\lambda_1)$

Τότε $\dim_{\mathbb{K}} V_1 \le \dim_{\mathbb{K}} V(\lambda_1) \Rightarrow k_1 \le \dim_{\mathbb{K}} V(\lambda_1) \le$

$\le$ πολ/τα της $\lambda_1 = k_1$

Άρα $k_1 = \dim_{\mathbb{K}} V(\lambda_1) =$ πολ/τα της λ_1

Παρόμοια: $\forall i = 1, \dots, p$: $k_i =$ πολ/τα της $\lambda_i = \dim_{\mathbb{K}} V(\lambda_i) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ισχύει το (β)

($\Leftarrow$) Έστω ότι ισχύουν τα (α) και (β)

Από το (α) έπεται ότι οι ιδιοτιμές του f ανήκουν στο $\mathbb{K}$ και έστω ότι αυτές είναι οι $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ (ανά δύο διαφορετικές) και πολλαπλότητα της $\lambda_i = k_i$, $1 \le i \le p$

και $k_1 + k_2 + \dots + k_p = n = \dim_{\mathbb{K}} E$

Επειδή οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ είναι ανά δύο διαφορετικές έπεται ότι το άθροισμα $V(\lambda_1) + V(\lambda_2) + \dots + V(\lambda_p)$ είναι ευθύ. Τότε όμως $V(\lambda_1) + V(\lambda_2) + \dots + V(\lambda_p) = V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus \dots \oplus V(\lambda_p)$ και

$\dim_{\mathbb{K}} \left[V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus \dots \oplus V(\lambda_p) \right] =$

$= \dim_{\mathbb{K}} V(\lambda_1) + \dim_{\mathbb{K}} V(\lambda_2) + \dots + \dim_{\mathbb{K}} V(\lambda_p)$

$\overset{(\beta)}{=} k_1 + k_2 + \dots + k_p = n = \dim_{\mathbb{K}} E \Rightarrow$

$\Rightarrow E = V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus \dots \oplus V(\lambda_p)$

Έστω β_1: βάση του $V(\lambda_1)$, β_2: βάση του $V(\lambda_2)$, $\vdots$, β_p: βάση του $V(\lambda_p)$. Επειδή $E = V(\lambda_1) \oplus \dots \oplus V(\lambda_p)$ έπεται ότι $\beta = \beta_1 \cup \beta_2 \cup \dots \cup \beta_p$ βάση του E.

Τότε $M_\beta^\beta(f)$ είναι ο
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \lambda_2 & \\ & & & & & & \lambda_p \\ 0 & & & & & & & \ddots & \lambda_p \end{pmatrix}$$
$\Rightarrow$ ο f: διαγωνοποιήσιμος

<u>Πόρισμα</u>: Έστω $f: E \to E$ ένας ενδομορφισμός του E, όπου $\dim_{\mathbb{K}} E = n < \infty$. Υποθέτουμε ότι ο f έχει n το πλήθος διακεκριμένες ιδιοτιμές. Τότε ο f είναι διαγωνοποιήσιμος.

<u>Απόδειξη</u>: Επειδή ο f έχει n το πλήθος ιδιοτιμές, έπεται ότι όλες οι ιδιοτιμές του f ανήκουν στο $\mathbb{K}$. Επειδή οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ του f είναι ανά δύο διαφορετικές, έπεται ότι πολλαπλότητα της $\lambda_i = 1$, $\forall i = 1, \dots, n$. Τότε $1 \leq \dim_{\mathbb{K}} V(\lambda_i) \leq$ πολλ/τα της $\lambda_i = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \dim_{\mathbb{K}} V(\lambda_i) =$ πολλ/τα της λ_i.
Από το Θεώρημα, ο f: διαγωνοποιήσιμος.

<u>Πόρισμα</u> Έστω $f: E \to E$ ένας ενδομορφισμός του E, $\dim_{\mathbb{K}} E = n < \infty$
Τότε ο f είναι διαγωνοποιήσιμος $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow E = V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus \dots \oplus V(\lambda_p)$, όπου $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ είναι οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του f $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ ο E έχει μια βάση, η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του f.

Αλγόριθμος Διαγωνοποίησης Ενδομορφισμού

$f: E \to E$ ενδομορφισμός, $\dim_K E = n < \infty$

Βήμα 1: Επιλέγουμε μια βάση β του E και υπολογίζουμε τον πίνακα $A = M^{\beta}_{\beta}(f)$

Βήμα 2: Σχηματίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_f(t) = |A - tI_n|$ και βρίσκουμε τις ρίζες του $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ στο K. Αυτές οι ρίζες θα είναι και οι ιδιοτιμές του f.

Βήμα 3: Αν όλες οι ιδιοτιμές του f ανήκουν στο K, τότε πηγαίνουμε στο βήμα 4, διαφορετικά ο f δεν είναι διαγωνοποιήσιμος.

Βήμα 4: Προσδιορίζουμε για κάθε ιδιοτιμή λ του f, βάση στον $V(\lambda)$

Βήμα 5: Αν $\dim_K V(\lambda) =$ πολ/τα της λ, για κάθε ιδιοτιμή λ του f, τότε πηγαίνουμε στο βήμα 6, διαφορετικά ο f δεν είναι διαγωνοποιήσιμος

Βήμα 6: Θέτουμε $e = \beta_1 \cup \beta_2 \cup \dots \cup \beta_p$ όπου β_i βάση του $V(\lambda_i)$, $1 \le i \le p$ και τότε:
$M^{e}_{e}(f)$: διαγώνιος.

Παράδειγμα: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (-2z, x+2y+z, x+3z)$

$\beta = \{\vec{e_1} = (1,0,0), \vec{e_2} = (0,1,0), \vec{e_3} = (0,0,1)\}$ κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$

$$A = M^{\beta}_{\beta}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P_f(t) = \begin{vmatrix} 0-t & 0 & -2 \\ 1 & 2-t & 1 \\ 1 & 0 & 3-t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -t & 0 & -2 \\ 1 & 2-t & 1 \\ 1 & 0 & 3-t \end{vmatrix} = -(t-2)^2(t-1)$$

Άρα οι ιδιοτιμές του f είναι $\lambda_1 = 2$ (πολ/τας 2) και $\lambda_2 = 1$ (πολ/τας 1)
$\Rightarrow$ όλες οι ιδιοτιμές του f ανήκουν στο $\mathbb{R}$.

$\underline{\lambda_1 = 2}$: $V(2)$: $(x,y,z) \in V(2) \iff (A - 2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2x-2z \\ x+z \\ x+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x-2z=0 \\ x+z=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x+z=0$

Άρα $(x,y,z) \in V(2) \iff x+z=0$. Τότε :

$V(2) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+z=0\} = \{(x,y,-x) \in \mathbb{R}^3 / x,y \in \mathbb{R}\} =$

$= \{x(1,0,-1) + y(0,1,0) \in \mathbb{R}^3 / x,y \in \mathbb{R}\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \{(1,0,-1), (0,1,0)\}$ βάση του $V(2)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} V(2) = 2 =$ πολλ/τα του $\lambda_1 = 2$

$\underline{\lambda_2 = 1}$: $V(1)$: $(x,y,z) \in V(1) \iff (A - 1I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -x-2z \\ x+y+z \\ x+2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x-2z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+2z=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = z \\ x = -2z \end{cases}$$

Άρα $V(1) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x=-2z, y=z\} = \{(-2z,z,z) \in \mathbb{R}^3 / z \in \mathbb{R}\}$

Μια βάση του $V(1)$ είναι η $\{(-2,1,1)\}$

Θέτουμε $\mathcal{C} = \{(1,0,-1), (0,1,0), (-2,1,1)\}$ και τότε $\mathcal{C}$ βάση του $\mathbb{R}^3$ και επιπλέον :

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

→ Ένας πίνακας $A\in M_n(\mathbb{K})$ καλείται διαγωνοποιήσιμος $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ ο A είναι όμοιος με έναν διαγώνιο πίνακα $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists$ αντιστρέψιμος πίνακας P: $P^{-1}AP$ διαγώνιος.

Θεωρούμε πάντα τον ενδομορφισμό $f_A:\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^n$, $f_A(X)=AX$

Πρόταση: Ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος $\Leftrightarrow$ ο ενδομορφισμός f_A είναι διαγωνοποιήσιμος.

Απόδειξη ($\Leftarrow$) Έστω ότι ο ενδομορφισμός f_A είναι διαγωνοποιήσιμος $\Rightarrow$ υπάρχει βάση e του $\mathbb{K}^n$ έτσι ώστε ο πίνακας $M_e^e(f_A)=\Delta$, διαγώνιος.

Όμως, αν β είναι η κανονική βάση του $\mathbb{K}^n$ γνωρίζουμε ότι $M_\beta^\beta(f_A)=A$.
Άρα οι πίνακες Δ και A είναι όμοιοι ως πίνακες του ίδιου ενδομορφισμού σε διαφορετικές βάσεις και θέτοντας $P=M_\beta^e$ έπεται ότι $P^{-1}AP=\Delta$, διαγώνιος $\Rightarrow A$: διαγωνοποιήσιμος.

($\Rightarrow$) Έστω ότι ο A διαγωνοποιήσιμος $\Rightarrow \exists$ αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε $P^{-1}AP=\Delta$, διαγώνιος, δηλαδή:

$$P^{-1}AP=\Delta=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

Θεωρούμε την κανονική βάση β του $\mathbb{K}^n$:

$$\beta=\left\{E_1=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}, E_2=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}, \dots, E_n=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\right\}$$

Θέτουμε
$$E_1'=P\cdot E_1$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$E_n'=P\cdot E_n$$

Έστω $P=\begin{pmatrix}p_{11} & \dots & p_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ p_{n1} & \dots & p_{nn}\end{pmatrix}$

Τότε: $P\cdot E_1=\begin{pmatrix}p_{11} & \dots & p_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ p_{n1} & \dots & p_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_{11}\\ \vdots\\ p_{n1}\end{pmatrix}$

$\vdots$

$P\cdot E_n=\begin{pmatrix}p_{11} & \dots & p_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ p_{n1} & \dots & p_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_{1n}\\ \vdots\\ p_{nn}\end{pmatrix}$

Τότε $e=\{E_1', E_2', \dots, E_n'\}$ είναι βάση του $\mathbb{K}^n$, διότι
$|e| = n = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n$ και $k_1E_1' + \dots + k_nE_n' = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow k_1 P\cdot E_1 + \dots + k_n P E_n = 0 \Rightarrow P(k_1E_1 + \dots + k_nE_n) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow k_1E_1 + \dots + k_nE_n = 0 \Rightarrow k_1 = \dots = k_n = 0$, διότι $\beta = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$
είναι βάση του $\mathbb{K}^n$

$$f_A(E_i') = A\cdot E_i' = APE_i = P\cdot\Delta\cdot E_i = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_i & \\ 0 & & & \ddots\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= P\begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_i & \\ 0 & & & \ddots\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i p_{1i} \\ \vdots \\ \lambda_i p_{ni} \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} p_{1i} \\ \vdots \\ p_{ni} \end{pmatrix} = \lambda_i P E_i = \lambda_i \cdot E_i'$$

Άρα $f_A(E_i') = \lambda_i E_i'$, $1 \le i \le n \Rightarrow M_e^e(f_A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow f_A$: διαγωνοποιήσιμος.

→ ① Χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του f_A και άρα $P_A(t) = P_{f_A}(t) = |A - tI_n|$
② λ ιδιοτιμή του $A \Leftrightarrow \lambda$ ιδιοτιμή του $f_A \Leftrightarrow \exists\, X \in \mathbb{K}^n, X \neq 0$ έτσι ώστε $AX = \lambda X$ και τότε X: ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην λ. Ιδιοτιμές του A: ρίζες του $P_A(t)$ που ανήκουν στο $\mathbb{K}$
③ $V_A(\lambda) = \{X \in \mathbb{K}^n / AX = \lambda X\} = \{X \in \mathbb{K}^n / f_A(X) = \lambda X\} = V_A(\lambda)$ καλείται ιδιοχώρος του $\mathbb{K}^n$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

Θεώρημα: Ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{K})$ είναι διαγωνοποιήσιμος $\Leftrightarrow$
α) Όλες οι ιδιοτιμές του A ανήκουν στο $\mathbb{K}$.
β) $\dim_{\mathbb{K}} V_A(\lambda) =$ πολ/τα της λ, $\forall \lambda$: ιδιοτιμή του A.

Αλγόριθμος Διαγωνοποίησης Πίνακα

Βήμα 1: Σχηματίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(t) = |A - tI_n|$ και βρίσκουμε τις ρίζες του $P_A(t)$ στο $\mathbb{K}$, δηλαδή τις ιδιοτιμές του A.

Βήμα 2: Αν όλες οι ρίζες του $P_A(t)$ ανήκουν στο $\mathbb{K}$ πηγαίνουμε στο Βήμα 3, διαφορετικά ο A δεν διαγωνοποιείται.

Βήμα 3: Για κάθε ιδιοτιμή λ του A βρίσκουμε βάσεις των ιδιοχώρων $V_A(\lambda)$

Βήμα 4: Αν $\dim_{\mathbb{K}} V_A(\lambda) =$ πολ/τα της ιδιοτιμής λ, τότε πηγαίνουμε στο βήμα 5, διαφορετικά ο A δεν διαγωνοποιείται

Βήμα 5: Έστω β_i βάση του ιδιοχώρου $V_A(\lambda_i)$, $\forall i = 1, \dots, k$ όπου $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ είναι οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του A, τότε θέτουμε $\beta = \bigcup_{i=1} \beta_i = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ βάση του

$\mathbb{K}^n$. Τέλος θέτουμε $P = (P_1 P_2 \dots P_n)$ και τότε P: αντιστρέψιμος πίνακας και:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} -t & 1 & 0 \\ -1 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 2-t \end{vmatrix} = (2-t)(t^2+1)$$

Οι ρίζες του $P_A(t)$ στο $\mathbb{R}$ είναι μόνο η $\lambda_1 = 2$ και άρα ο A δεν διαγωνοποιείται όταν θεωρηθεί ως πίνακας πραγματικών αριθμών.

Αντίθετα, αν ο πίνακας A θεωρηθεί ως πίνακας μιγαδικών αριθμών τότε οι ρίζες του $P_A(t)$ στο $\mathbb{C}$ είναι $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = i$ και

$\lambda_3 = i$. Επειδή η πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής είναι ίση με 1! ο A είναι διαγωνοποιήσιμος στο $\mathbb{C}$.

$\underline{\lambda_1 = 2}$ | $V_A(2)$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V_A(2) \Leftrightarrow (A - 2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y = 0 \\ -x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow V_A(2) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_3 \,/\, x = y = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_3 / z \in \mathbb{C} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Άρα $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ βάση του $V_A(2)$

$\underline{\lambda_2 = i}$ | $V_A(i)$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V_A(i) \Leftrightarrow (A - iI_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \\ -1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 2-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -ix + y \\ -x - iy \\ (2-i)z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -ix + y = 0 \\ -x - iy = 0 \\ (2-i)z = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ ix \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V_A(i) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ ix \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_3 \,/\, x \in \mathbb{C} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ βάση του $V_A(i)$

$\underline{\lambda_3 = -i}$ | $V_A(-i) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ βάση του $V_A(-i)$

Θέτουμε $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & i & -i \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Τότε P: αντιστρέψιμος και $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$